Funzioni olomorfe

Nicola Arcozzi
Università di Bologna

11 aprile 2018

1 Nozioni di base nel campo complesso

Identifichiamo $z = x + iy$ con la coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, identificando così $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$. Il *modulo* del numero complesso $z = x + iy$ è $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$. Il *coniugato* di z è $z^* = x - iy$.

Note 1 Rivedere dagli appunti di Analisi Matematica A il capitolo concernente i numeri complessi.

Diciamo che un sottoinsieme A di $\mathbb{C}$ è *aperto* se lo è come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, e lo stesso facciamo per tutte le nozioni metriche, topologiche, differenziali: insiemi aperti, chiusi, connessi, eccetera; funzioni continue, differenziabili, curve, eccetera. Per esempio, una *curva* (di classe C^1) in $\mathbb{C}$ è una mappa $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, dove $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono derivabili. Poniamo

$$\gamma^{'}(t) := x'(t) + iy'(t) \tag{1}$$

Il numero definito in (1) è complesso, $\gamma'(t) \in \mathbb{C}$, e si identifica con il vettore velocità $(x'(t), y'(t))$, che apprtiene a $\mathbb{R}^2$.

Ricordiamo che *una curva chiusa in* $A \subseteq \mathbb{C}$ *è deformabile in un punto in* A se la possiamo modificare con continuità dentro A sino a farla diventare un punto. Una definizione formale di questa nozione è la seguente.

Definition 1 *Una curva chiusa $\gamma : [a, b] \to A$, con $A \subseteq \mathbb{C}$, è **deformabile in un punto in** A se esistono una funzione continua:*

$$\Phi : [a, b] \times [0, 1] \to A$$

e un punto z_0 in A tali che $\Phi(t, 0) = \gamma(t)$ e $\Phi(t, 1) = z_0$ per ogni $t \in [a, b]$.

Cioè, le curve $\gamma_s(t) = \Phi(t, s)$, $t \in [a, b]$, variano con continuità da $\gamma_0 = \gamma$ a $\gamma_1(t) = z_0$, la traiettoria che sta ferma in z_0. L'insieme A è semplicemente connesso se ogni curva chiusa in A è deformabile in un punto rimando in A. Nel caso in cui A sia aperto, se γ è C^1 ed è possibile deformarla in z_0 in A, allora lo si può fare in maniera che tutte le curve γ_t siano a loro volta C^1.

Definition 2 *Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ e siano $\gamma : [a, b] \to A$ una curva C^1 e $f : A \to \mathbb{C}$ continua. L'**integrale complesso di** f **lungo** γ è definito da*

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Il prodotto che appare nella definizione è il prodotto di numeri complessi. Posto $z = \gamma(t)$, possiamo scrivere più suggestivamente:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt,$$

che mnemonicamente si riconduce a $dz = z'(t)dt$.

Example 1 Calcoliamo $\int_\gamma zdz$, dove $\gamma(t) = t + it$, $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma zdz &= \int_0^1 z(t)z'(t)dt \\
&= \int_0^1 (t + it)(1 + i)dt \\
&\quad \text{poiché} z'(t) = 1 + i \\
&= \int_0^1 t(1 + i)^2 dt \\
&= (1 + 2i - 1) \int_0^1 tdt \\
&= 2i \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 2i\frac{1}{2} = i.
\end{aligned}$$

Notation 1 *Scriviamo $z = x + iy$ per denotare un numero complesso. Se $f : A \to \mathbb{C}$, dove A è un sottoinsieme di $\mathbb{C}$, allora denotiamo le sue componenti reale e complessa con u e v: $f = u + iv \equiv (u, v)$, con $u, v : A \to \mathbb{R}$.*

2 Funzioni olomorfe: derivate e integrali curvilinei

Le funzioni olomorfe, come vedremo presto, possono essere viste da diversi punti di vista: come la versione complessa di una forma esatta (ciò che ha a che fare con gli integrali curvilinei complessi), ovvero come funzioni derivabili nel senso del rapporto incrementale complesso. A fare da trait d'union tra le due vi sono delle equazioni che coinvolgono le derivate parziali della funzione, che possono essere viste come il terzo *avatar* dell'olomorfia[1]. Un quarto punto di vista è dato dalla sviluppabilità in serie di potenze: lo vedremo più avanti.

[1] L'idea è che lo stesso concetto, l'olomorfia, ci si presenta attraverso diverse manifestazioni, che in sanscrito vengono chiamate per l'appunto *avatara*.

Il seguente teorema ci dà conto dei primi tre *avatar*.

Theorem 1 (Teorema integrale di Cauchy) *Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f = u + iv : A \to \mathbb{C}$, con $u, v \in C^1(A)$. Le seguenti proprietà di f sono equivalenti:*

I. *Per ogni curva chiusa γ in A che sia deformabile a un punto in A si ha che*
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

II. *Valgono in A le* ***equazioni di Cauchy-Riemann****: per ogni z in A si ha che*
$$(CR) \begin{cases} \partial_x u(z) = \partial_y v(z), \\ \partial_y u(z) = -\partial_x v(z). \end{cases}$$

III. *La funzione f ha derivata nel senso complesso; cioè, per z in A si ha che esiste:*
$$f'(z) := \lim_{h \to 0 in \mathbb{C}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \in \mathbb{C}.$$

Se f soddisfa una delle tre condizioni (I-III), quindi tutte, allora diciamo che f è **olomorfa** in A.

Nella definizione di derivata complessa abbiamo usato il fatto che si può dividere per un numero complesso non nullo. Quando sviluppavamo il calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$, dove gli incrementi sono vettori, questi non possono essere messi al denominatore, quindi un rapporto incrementale "complessivo" non può essere definito. Infatti, avevamo incrementato la variabile indipendente in ciascuna direzione, ottenendo così "derivate parziali".

A essere chiamato *teorema integrale di Cauchy* è in genere l'equivalenza tra (I) e (III).

Proof Mostriamo prima (I)$\Leftrightarrow$(II). Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b (u(z) + iv(z))d(x+iy) \\
&= \int_a^b (u(z) + iv(z))(dx + idy) \\
&= \int_a^b [(u(z)dx - v(z)dy) + i(v(z)dx + u(z)dy)] \\
&\quad \text{avendo calcolato un prodotto dinumeri complessi} \\
&= \int_a^b \alpha(z) + i\beta(z) \\
&\quad \text{dove } \alpha(z) = u(z)dx - v(z)dy, \beta(z) = v(z)dx + u(z)dy \text{ sono } 1-\text{forme} \\
&= \int_a^b \alpha(z) + i \int_a^b \beta(z) \\
&= \int_\gamma \alpha + i \int_\gamma \beta.
\end{aligned}$$

Quindi $\int_\gamma f(z)dz = 0$ se e solo se $\int_\gamma \alpha = 0$ e $\int_\gamma \beta = 0$ per ogni curva chiusa γ deformabile in un punto in A. Cioè, se e solo se le forme α e β sono esatte. Per il teorema di Poincaré, vista la forma che hanno α e β, ciò accade se e solo se

$$\begin{cases} 0 = \partial_y(u) - \partial_x(-v) = \partial_y u + \partial_x v, & \text{per l'esattezza di } \alpha, \\ 0 = \partial_y(v) - \partial_x(u) = \partial_y v - \partial_x u, & \text{per l'esattezza di } \beta. \end{cases}$$

Ma queste sono rispettivamente la seconda e la prima delle equazioni di Cauchy-Riemann in (II).

Mostriamo ora che (II)$\Leftrightarrow$(III). Supponiamo che valga (III), cioè che f abbia derivata nel senso complesso in ogni $z \in A$, e fissiamo un tale $z = x + iy$. Nel far tendere h a zero in $\mathbb{C}$, possiamo restringerci a $h \in \mathbb{R}$ o a $h = ik \in i\mathbb{R}$. Nel primo caso:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0 \text{in} \mathbb{R}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0 \text{in} \mathbb{R}} \frac{[u(x+iy+h) + iv(x+iy+h)] - [u(x+iy) + iv(x+iy)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0 \text{in} \mathbb{R}} \frac{[u(x+iy+h) - u(x+iy)] - i[v(x+iy+h) - v(x+iy)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0 \text{in} \mathbb{R}} \frac{u(x+iy+h) - u(x+iy)}{h} + i \lim_{h\to 0 \text{in} \mathbb{R}} \frac{v(x+iy+h) - v(x+iy)}{h} \\ &= \partial_x u(z) + i\partial_x v(z), \end{aligned}$$

poiché l'incremento era nella sola direzione x. Un conto simile nel secondo caso ci dà:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0 \text{in} \mathbb{R}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{h\to 0 \text{in} \mathbb{R}} \frac{[u(x+i(y+h)) + iv(x+i(y+h))] - [u(x+iy) + iv(x+iy)]}{h} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{h\to 0 \text{in} \mathbb{R}} \frac{u(x+i(y+h)) - u(x+iy)}{h} + \lim_{h\to 0 \text{in} \mathbb{R}} \frac{v(x+i(y+h)) - v(x+iy)}{h} \\ &= -i\partial_y u(z) + \partial_y v(z), \end{aligned}$$

Ne segue che $\partial_x u(z) + i\partial_x v(z) = f'(z) = -i\partial_y u(z) + \partial_y v(z)$, cioè che $\partial_x u(z) = \partial_y v(z)$ e che $\partial_x v(z) = -\partial_y u(z)$, che sono le equazioni CR.

Il viceversa (III)$\Rightarrow$(II) si mostra in maniera abbastanza simile. Supponiamo che f sia C^1 e che soddisfi le equazioni CR. Allora, possiamo scrivere la differenziabilità di $f = u + iv \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ in z come (con $h = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$):

$$
\begin{aligned}
f(z+h) - f(z) &\equiv \begin{pmatrix} u(z+h) \\ v(z+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} \\
&= Jf(z)h + o(h) \\
&\ \text{dove } Jf \text{ è la matrice jacobiana} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x u(z) & \partial_y u(z) \\ \partial_x v(z) & \partial_y v(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + o(h) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x u(z) & -\partial_x v(z) \\ \partial_x v(z) & \partial_x u(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + o(h) \\
&\ \text{per CR} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x u(z)a - \partial_x v(z)b \\ \partial_x v(z)a + \partial_x u(z)b \end{pmatrix} + o(h) \\
&\equiv [\partial_x u(z)a - \partial_x v(z)b] + i[\partial_x v(z)a + \partial_x u(z)b] + o(h) \\
&= (\partial_x u(z) + i\partial_x v(z))(a + ib) + o(h) \\
&\ \text{dove il prodotto è quello in } \mathbb{C} \\
&= (\partial_x u(z) + i\partial_x v(z))h + o(h) \\
&= [\partial_x (u + iv)(z)]h + o(h) \\
&= \partial_x f(z)h + o(h).
\end{aligned}
$$

Essendo il prodotto quello in $\mathbb{C}$, possiamo dividere per h e otteniamo:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \partial_x f(z) + \frac{o(h)}{h} \to \partial_x f(z) \text{ per } h \to 0 \text{ in } \mathbb{C},$$

cioè esiste $f'(z)$, il limite del rapporto incrementale complesso, e vale $f'(z) = \partial_x f(z)$.

□

Le equazioni di Cauchy-Riemann, nella dimostrazione che (III)⇒(II), servono di fatto a identificare un prodotto matrice×vettore con il prodotto di due numeri complessi. Su questo aspetto, che sta alla base dell'interpretazione geometrica dell'olomorfia (un altro avatar!), non ci soffermiamo.